Hoja de ejercicios 8

Ejercicio 1: Sea $\{X_n\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad: $X_n = \begin{cases} 0, & 1-\frac{1}{n} \\ a_n, & \frac{1}{n} \end{cases}$, $a_n \in \mathbb{N}, \forall n.$

Demostrar que X_n converge en probabilidad a 0.

Ejercicio 2: Sea $\{X_n\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad: $X_n = \begin{cases} 0, & q = 1-p \\ 1, & p \end{cases}$, Siendo $0 \leq p \leq 1.$

Sea $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$ y $Z_n = min\{X_1, ..., X_n\}$. Demostrar que Y_n converge en probabilidad a 1 y que Z_n convergen en probabilidad a 0.

Ejercicio 3: Sea $\{X_n\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes tales que:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\beta)} & \text{si } x \geq \beta \\ 0 & fuera \end{cases}$$

Sea $Y_n = min\{X_1, ..., X_n\}$, demostrar que Y_n converge en probabilidad a β.

Ejercicio 4: Sea $\{X_n\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad:

$$X_n = \begin{cases} 0, & 1-\frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \end{cases}$$

Probar que X_n converge en ley a 0.

Ejercicio 5: Sean $\{X_1, ..., X_n\}$ variables aleatorias independientes tales que $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = 9, \forall i = 1, ..., n$. Utilizar el Teorema Central del Limite para determinar el mínimo valor de n tal que: $P\Big(\Big|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\Big| \leq 0{,}3\Big) \geq 0{,}95.$

Ejercicio 6: Supongamos que el 75 % de las personas viven en la ciudad y el 25 % en la periferia. Si las 1200 personas que van a un concierto son una muestra representativa de la población. Calcular la probabilidad de que el número de personas que viven en la periferia y asistan al concierto sea a lo sumo 270.

Ejercicio 7: Sea X la variable aleatoria ”número de defectos en un rollo de tela”. Se consideran 125 rollos en los cuales, los defectos son independientes. Calcular la probabilidad de que el promedio de defectos en los 125 rollos sea a lo sumo 5.5. Supongamos que X sigue una distribución de $Poisson(5)$.

Ejercicio 8: En una población la talla de varón adulto es una variable aleatoria X, con $EX = 170$ cm y $Var(X) = 49$ cm. Se eligen 146 individuos al azar en condición de independencia. Calcular la probabilidad de que su estatura media se desvíe de 170 a lo sumo 1 cm.

Ejercicio 9: Sea $\{X_n\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes con función de probabilidad: $X_n = \begin{cases} 0, & q = 1 - p \\ 1, & p \end{cases}$ Siendo $0 \leq p \leq 1$.

Sea $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$ y $Z_n = min\{X_1, ..., X_n\}$. Demostrar que Y_n converge en media de orden r a 1 y que Z_n convergen en media de orden r a 0.

Ejercicio 10: Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i. tales que X_j sigue una distribución $B(1, p)$, $\forall j = 1, 2, ...$; Sean las sucesiones $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$ y $Z_n = min\{X_1, ..., X_n\}$. Probar que Y_n converge en ley a 1 y que Z_n convergen en ley a 0. Para ello hacer uso de la convergencia de las f. características y la convergencia de las f. de probabilidad.

Ejercicio 11: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.i. tales que X_n sigue una distribución $N(0, \frac{1}{n})$. Probar que X_n converge en ley a 0 mediante la convergencia de las f. de densidad y la convergencia de las f. características.

Ejercicio 12: Desarrollar un contraejemplo para las hipótesis del teorema central del limite.